

Modelo Difuso TOPSIS que Maneja Información Lingüística Dudosa en Contextos Heterogéneos

Rosa M. Rodríguez¹ *, Francisco J. Estrella², and Luis Martínez²

¹ Dpto. de Ciencias de la Computación e I.A., Universidad de Granada, España

² Dpto. de Informática, Universidad de Jaén, España

Resumen En muchos problemas de toma de decisión intervienen múltiples criterios que pueden ser de diferente naturaleza cualitativa o cuantitativa. Ésto implica que el problema deba definirse en un contexto heterogéneo en el que los expertos pueden utilizar diferentes tipos de información para expresar sus valoraciones las cuales pueden ser vagas e imprecisas. Además, en algunas ocasiones los expertos pueden dudar sobre sus valoraciones porque no tienen suficiente información o conocimiento sobre el problema de decisión. En esta contribución se propone un modelo difuso de toma de decisión multi-criterio TOPSIS capaz de modelar la vaguedad e imprecisión mediante el modelado difuso y los conjuntos de términos lingüísticos difusos dudosos para facilitar a los expertos la expresión de sus valoraciones y obtener resultados precisos y fiables.

Keywords: Toma de decisión multi-criterio, información heterogénea, expresiones lingüísticas comparativas, conjunto de términos lingüísticos difusos dudosos.

1. Introducción

La toma de decisiones es un proceso habitual que realizan los seres humanos en su vida diaria y que consiste en seleccionar la mejor alternativa de un conjunto de posibles alternativas. Hay muchos problemas de toma de decisión en los cuales las alternativas se evalúan atendiendo a varios criterios, hablándose de Toma de Decisiones Multi-Criterio (TDMC). Ésto implica una optimización múltiple de dichos criterios. Con frecuencia los criterios definidos en las alternativas pueden ser de diferente naturaleza, cuantitativa o cualitativa. En este caso, el problema de TDMC es definido en un marco de trabajo heterogéneo. Ésto no solo implica la necesidad de definir un contexto heterogéneo [4,9] en el cual diferentes tipos de información puedan modelar el conocimiento y la incertidumbre, sino que puede hacer que los expertos que participan en el problema de decisión proporcionen información vaga e imprecisa y duden sobre sus valoraciones. El uso del enfoque lingüístico difuso [5,8,12] ha proporcionado muy buenos resultados modelando la incertidumbre relacionada con la vaguedad y la imprecisión mediante

* Autor de contacto

variables lingüísticas. Sin embargo, para modelar la incertidumbre provocada por la duda es necesario un enfoque más flexible capaz de modelar expresiones lingüísticas más complejas que los términos lingüísticos. Para ello se han introducido diferentes propuestas [1,11,16], pero las expresiones que obtienen estas propuestas no son similares a las expresiones utilizadas por los seres humanos en situaciones de decisión. Recientemente, Rodríguez et al. han introducido el concepto de Conjunto de Términos Lingüísticos Difusos Dudosos (CTLDD) [15] que permite modelar múltiples términos lingüísticos y definieron una gramática libre de contexto capaz de generar formalmente expresiones lingüísticas comparativas con el objetivo de facilitar a los expertos la expresión de información lingüística cuando tienen que proporcionar sus valoraciones y dudan entre varios términos lingüísticos. Estas expresiones son similares a las expresiones utilizadas por los seres humanos en problemas de toma de decisión siendo su base de representación dichos CTLDD.

Existen diferentes modelos de TDMC [2,8,13], pero que nosotros sepamos ninguno de ellos es capaz de manejar información heterogénea que incluya expresiones lingüísticas más complejas que términos lingüísticos simples. Por tanto, el objetivo de esta contribución es proponer un proceso de selección basado en un modelo difuso de TDMC TOPSIS que sea capaz de tratar con problemas definidos en un contexto heterogéneo en el que expresiones lingüísticas comparativas, términos lingüísticos, valores numéricos e intervalares, puedan ser utilizados tanto para valorar los criterios definidos en el problema de toma de decisión, como para expresar las opiniones sobre la importancia de los criterios.

El resto de esta contribución se organiza como sigue: la Sección 2 hace una breve revisión sobre el modelado de información lingüística dudosa mediante el uso de gramáticas libres de contexto y CTLDD. En la Sección 3 se propone un proceso de selección basado en un modelo difuso de TDMC TOPSIS capaz de manejar expresiones lingüísticas comparativas, términos lingüísticos, valores numéricos e intervalares. Finalmente, algunas conclusiones son presentadas en la Sección 4.

2. Modelado de Información Lingüística Dudosa

En un problema de TDMC el experto o conjunto de expertos que participan en el problema tienen que valorar múltiples criterios para obtener la valoración de las diferentes alternativas. Matemáticamente, un problema de TDMC puede ser modelado como sigue:

$$(\text{Toma de decisiones multi-criterio}) = \begin{cases} \text{Seleccionar} : x_1, x_2, \dots, x_n \\ \text{sujeto a} : c_1, c_2, \dots, c_p \end{cases} \quad (1)$$

donde $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ es un conjunto de n alternativas, y $C = \{c_1, \dots, c_p\}$ representa un conjunto de p criterios que caracteriza una situación de decisión. Una representación del problema puede observarse en la Tabla 1, donde cada entrada r_{ij} indica la valoración de la alternativa x_i respecto al criterio c_j .

Tabla 1. Esquema general de un problema de TDMC

Alternativas	<i>Criterios</i>			
x_i	c_1	c_2	\dots	c_p
x_1	r_{11}	r_{12}	\dots	r_{1p}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_n	r_{n1}	r_{n2}	\dots	r_{np}

Normalmente, los expertos que participan en un problema de TDMC expresan sus valoraciones atendiendo a su conocimiento y analizando la información disponible sobre el problema. Sin embargo, en algunos problemas de TDMC los expertos pueden dudar sobre sus valoraciones debido a la falta de conocimiento, presión del tiempo o falta de información sobre el problema. En estas situaciones el uso de un único valor no es suficiente para expresar sus valoraciones. Recientemente, Torra ha introducido el concepto de Conjunto Difuso Dudosos (CDD) [17] para modelar este tipo de incertidumbre en contextos cuantitativos, permitiendo a los expertos definir el grado de pertenencia de un elemento a un conjunto difuso mediante varios valores.

Definición 1 [17] Sea X un conjunto de referencia, un CDD en X es una función h que devuelve un subconjunto no vacío de valores en el intervalo $[0,1]$:

$$h : X \rightarrow P([0, 1]) \tag{2}$$

Similarmente, en contextos cualitativos puede suceder que los expertos duden entre varios términos lingüísticos para valorar una variable lingüística. Para modelar este tipo de incertidumbre en contextos cualitativos, Rodríguez et al. [15] introdujeron el concepto de CTLDD.

Definición 2 [15] Sea $S = \{s_0, \dots, s_g\}$ un conjunto de términos lingüísticos, un CTLDD H_S , se define como un subconjunto finito ordenado de términos lingüísticos consecutivos de S .

$$H_S = \{s_i, s_{i+1}, \dots, s_j\}, \text{ tal que } s_k \in S, \quad k \in \{i, \dots, j\} \tag{3}$$

Ejemplo 1 Sea $S = \{Nada, Muy Bajo, Bajo, Medio, Alto, Muy Alto, Perfecto\}$ un conjunto de términos lingüísticos, y ϑ una variable lingüística, un CTLDD $H_S(\vartheta)$ podría ser,

$$H_S(\vartheta) = \{Alto, Muy Alto, Perfecto\}$$

$$H_S(\vartheta) = \{Muy Bajo, Bajo, Medio\}$$

Sin embargo, en problemas de toma de decisión los expertos que dudan entre varios términos lingüísticos no suelen utilizar múltiples términos lingüísticos para expresar sus preferencias, sino expresiones lingüísticas comparativas cercanas al proceso cognitivo de los seres humanos. Por tanto, Rodríguez et al. mejoraron la

elicitación de información lingüística dudosa generando expresiones lingüísticas mediante el uso de una gramática libre de contexto. Las expresiones generadas son similares a las expresiones que utilizan los seres humanos en situaciones de decisión cuando tienen duda. Una gramática libre de contexto G_H , fue definida en [14] para construir expresiones lingüísticas comparativas similares a las expresiones utilizadas por los expertos en problemas de toma de decisión lingüísticos.

Definición 3 [14] Sea G_H una gramática libre de contexto y $S = \{s_0, \dots, s_g\}$ un conjunto de términos lingüísticos. Los elementos de $G_H = (V_N, V_T, I, P)$ son definidos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} V_N &= \{\langle \text{término primario} \rangle, \langle \text{término compuesto} \rangle, \langle \text{relación unaria} \rangle, \\ &\langle \text{relación binaria} \rangle, \langle \text{conjunción} \rangle\} \\ V_T &= \{\text{menor que}, \text{mayor que}, \text{al menos}, \text{como mucho}, \text{entre}, y, s_0, s_1, \dots, s_g\} \\ I &\in V_N \\ P &= \{I ::= \langle \text{término primario} \rangle | \langle \text{término compuesto} \rangle \\ &\langle \text{término compuesto} \rangle ::= \langle \text{relación unaria} \rangle \langle \text{término primario} \rangle | \\ &\langle \text{relación binaria} \rangle \langle \text{término primario} \rangle \langle \text{conjunción} \rangle \langle \text{término primario} \rangle \\ &\langle \text{término primario} \rangle ::= s_0 | s_1 | \dots | s_g \\ &\langle \text{relación unaria} \rangle ::= \text{menor que} | \text{mayor que} | \text{al menos} | \text{como mucho} \\ &\langle \text{relación binaria} \rangle ::= \text{entre} \\ &\langle \text{conjunción} \rangle ::= y\} \end{aligned}$$

Ejemplo 2 Supongamos el conjunto de términos lingüístico $S = \{Nada, Muy Bajo, Bajo, Medio, Alto, Muy Alto, Perfecto\}$, dos posibles expresiones lingüísticas comparativas ll_1 y ll_2 generadas por la gramática libre de contexto G_H podrían ser las siguientes:

$$\begin{aligned} ll_1 &= \text{menor que Bajo} \\ ll_2 &= \text{entre Medio y Muy Alto} \end{aligned}$$

Para realizar operaciones con estas expresiones, una función de transformación E_{G_H} , fue definida en [15] para transformar las expresiones lingüísticas en CTLDD para poder operar sobre ellos.

Definición 4 [15] Sea E_{G_H} una función que transforma las expresiones lingüísticas ll obtenidas mediante la gramática libre de contexto G_H , en CTLDD H_S , donde S es el conjunto de términos lingüísticos utilizado por G_H , y S_{ll} es el conjunto de expresiones lingüísticas generadas mediante G_H .

$$E_{G_H} : S_{ll} \longrightarrow H_S \quad (4)$$

La transformación de las expresiones lingüísticas comparativas en CTLDD dependerá de las expresiones que genere la gramática libre de contexto G_H . A continuación se introduce la transformación de las expresiones generadas por la gramática libre de contexto G_H , introducida en la Definición 3.

- $E_{G_H}(s_i) = \{s_i / s_i \in S\}$
- $E_{G_H}(\text{menor que } s_i) = \{s_j / s_j \in S \text{ y } s_j < s_i\}$

- E_{G_H} (mayor que s_i) = $\{s_j/s_j \in S \text{ y } s_j > s_i\}$
- E_{G_H} (al menos s_i) = $\{s_j/s_j \in S \text{ y } s_j \geq s_i\}$
- E_{G_H} (como mucho s_i) = $\{s_j/s_j \in S \text{ y } s_j \leq s_i\}$
- E_{G_H} (entre s_i y s_j) = $\{s_k/s_k \in S \text{ y } s_i \leq s_k \leq s_j\}$

Para facilitar los procesos computacionales con CTLDD, en [10] fue propuesto el concepto de *envoltura difusa* para CTLDD que representa las expresiones lingüísticas mediante una función de pertenencia difusa obtenida de agregar los términos lingüísticos que componen el CTLDD.

Definición 5 [10] Sea $H_S = \{s_i, s_{i+1}, \dots, s_j\}$ un CTLDD tal que $s_k \in S = \{s_0, \dots, s_g\}$, $k \in \{i, \dots, j\}$.

$$env_F(H_S) = T(a, b, c, d), \tag{5}$$

donde $T(a,b,c,d)$ es una función de pertenencia triangular o trapezoidal.

En este trabajo utilizaremos la envoltura difusa para facilitar los procesos computacionales con las expresiones lingüísticas comparativas. Más información sobre la obtención de la envoltura difusa puede ser encontrada en [10].

3. Proceso de Selección Basado en un Modelo Difuso de TDMC TOPSIS

Esta sección propone un proceso de selección basado en un modelo difuso de TDMC TOPSIS definido en un contexto heterogéneo. En este modelo los expertos que participan en el problema de decisión pueden expresar sus valoraciones sobre los criterios, y su opinión sobre la importancia de los mismos mediante expresiones lingüísticas comparativas, términos lingüísticos, valores numéricos e intervalares, dependiendo de la naturaleza de los criterios y el área de conocimiento de cada experto. Este proceso de selección se divide en seis pasos que a continuación se detallan.

3.1. Definición del Marco de Trabajo

En esta fase se definen todos los elementos que forman parte del problema de TDMC.

- Un conjunto de expertos $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ que participan en el problema.
- Un conjunto de alternativas $X = \{x_1, \dots, x_n\}$.
- Un conjunto de criterios $C = \{c_1, \dots, c_p\}$.
- El conjunto de dominios de expresión D , en el que las valoraciones sobre los criterios y la importancia de los mismos serán expresados. En este trabajo los dominios de expresión que se van a utilizar son los siguientes:
 - Expresiones lingüísticas comparativas, $ll \in S_{ll}$.
 - Términos lingüísticos, $S = \{s_0, \dots, s_g\}$.
 - Valores numéricos, $\vartheta \in \mathfrak{R}$.
 - Valores intervalares, $\vartheta \in I[\underline{i}, \bar{i}]$ donde $\underline{i}, \bar{i} \in \mathfrak{R}$.

3.2. Recolección de Información

Una vez se ha definido el marco de trabajo del problema de TDMC, los expertos $e_k \in E$ proporcionan sus valoraciones sobre las alternativas $x_l \in X$ y criterios $c_i \in C$ utilizando los dominios de expresión definidos en la fase anterior. Las valoraciones son representadas mediante vectores de utilidad, $(r_i^{kl}, \dots, r_p^{kl})$ con $i \in \{1, \dots, p\}$ (ver Tabla 2).

Tabla 2. Valoraciones sobre las alternativas x_l según los criterios c_i

e_1	$\{r_1^{1l}, \dots, r_p^{1l}\}$
e_2	$\{r_1^{2l}, \dots, r_p^{2l}\}$
\dots	\dots
e_m	$\{r_1^{ml}, \dots, r_p^{ml}\}$

De igual forma los expertos expresarán sus opiniones sobre la importancia de los criterios c_i , para poder determinar el peso de los mismos. Estas valoraciones son también representadas mediante vectores de utilidad (w_1^k, \dots, w_p^k) (ver Tabla 3).

Tabla 3. Importancia de cada criterio c_i según cada experto e_k , w_i^k

e_1	$\{w_1^1, \dots, w_p^1\}$
e_2	$\{w_1^2, \dots, w_p^2\}$
\dots	\dots
e_m	$\{w_1^m, \dots, w_p^m\}$

3.3. Proceso de Unificación

Dado que los expertos han utilizado diferentes dominios de expresión para expresar sus valoraciones, para poder realizar el proceso de agregación es necesario que la información heterogénea sea unificada en un único dominio de expresión. En este caso será un dominio difuso para facilitar el modelado de la incertidumbre en los procesos computacionales. El proceso de unificación es diferente según el tipo de información.

- Las expresiones lingüísticas comparativas $ll \in S_{ll}$ son transformadas en CTLDD H_S , mediante la función de transformación $E_{G_H}(\cdot)$. A continuación se obtiene la envoltura difusa $env_F(\cdot)$ para cada CTLDD.

$$env_F(E_{G_H}(r_i^{kl})) = T(a, b, c, d)$$

- Los términos lingüísticos $s_i \in S = \{s_0, \dots, s_g\}$ son representados mediante números difusos trapezoidales. De esta forma, un término lingüístico s_i es representado mediante un número difuso trapezoidal $\tilde{A} = (a, b, c, d)$.

- Los valores numéricos ϑ , primero son normalizados en el intervalo $[0,1]$ y después son transformados en números difusos trapezoidales utilizando la siguiente función [6]:

Definición 6 Sea R_N una función que transforma un valor numérico en un número difuso trapezoidal:

$$R_N : [0, 1] \rightarrow \tilde{A} \tag{6}$$

$$R_N(\vartheta) = \tilde{A} = (\vartheta, \vartheta, \vartheta, \vartheta)$$

donde $\vartheta \in [0, 1]$.

- Los valores intervalares $I = [\underline{i}, \bar{i}]$ al igual que los valores numéricos son primero normalizados en el intervalo $[0,1]$ y luego transformados en un número difuso trapezoidal. Un valor intercalar tiene definida su función de pertenencia en un dominio difuso como sigue [7]:

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \underline{i} \\ 1 & \text{si } \underline{i} \leq x \leq \bar{i} \\ 0 & \text{si } \bar{i} < x \end{cases} \tag{7}$$

donde $x \in [0, 1]$.

La función de transformación para valores intervalares se define mediante la Ecuación (7).

Definición 7 Sea R_I una función que transforma un valor intercalar en un número difuso trapezoidal:

$$R_I : [\underline{i}, \bar{i}] \rightarrow \tilde{A} \tag{8}$$

$$R_I([\underline{i}, \bar{i}]) = \tilde{A} = (\underline{i}, \underline{i}, \bar{i}, \bar{i})$$

donde $\underline{i}, \bar{i} \in [0, 1]$ y $\underline{i} \leq \bar{i}$.

Por cuestión de notación, una vez las valoraciones sobre los criterios r_i^{kl} , y la importancia de los mismos w_i^k han sido unificadas en un dominio difuso, éstas serán representadas con la siguiente notación: \tilde{r}_i^{kl} y \tilde{w}_i^k .

3.4. Obtención de los Pesos de los Criterios

En esta fase las opiniones que los expertos han proporcionado sobre la importancia de los criterios \tilde{w}_i^k , son utilizadas para obtener los pesos de los mismos. Esta fase se divide en tres pasos:

1. *Obtención de los pesos globales difusos*: una vez los pesos han sido unificados en un dominio difuso, éstos son agregados para obtener un peso difuso global para cada criterio \tilde{w}_i . Para realizar el proceso de agregación es utilizada la siguiente ecuación:

$$\mu_{\tilde{w}_i}(z) = \sup_{z=\max(x_1, x_2, \dots, x_m)} \min(\mu_{\tilde{w}_i^1}(x_1), \mu_{\tilde{w}_i^2}(x_2), \dots, \mu_{\tilde{w}_i^m}(x_m)), \\ x_t \in X, t \in \{1, \dots, m\}$$

donde $i = \{1, \dots, p\}$ y X es el universo de discurso.

2. *Obtención de los pesos globales*: a continuación se aplica el método del centro de gravedad (CG) para obtener los pesos globales de cada criterio \tilde{w}_i .

$$CG = \frac{\int \mu_{\tilde{w}_i}(x) * x dx}{\int \mu_{\tilde{w}_i}(x)}, x \in X \quad (9)$$

El resultado es un vector de pesos para los criterios $W = (w_1, \dots, w_p)$.

3. *Normalización de los pesos*: finalmente, los vectores de pesos obtenidos son normalizados.

$$\sum_{i=1}^p w_i = 1 \quad (10)$$

3.5. Proceso de Agregación

En esta fase las valoraciones de los expertos son agregadas mediante un operador de agregación difuso $\psi(\cdot)$ para obtener un valor colectivo \tilde{r}_i^l , para cada criterio c_i , y alternativa x_l .

$$\tilde{r}_i^l = \psi(\tilde{r}_i^{kl}) \quad (11)$$

3.6. Aplicación del Método TOPSIS Difuso

Finalmente, se utiliza el método TOPSIS difuso para obtener un ranking de alternativas y seleccionar la mejor de ellas. El método TOPSIS difuso consiste en los siguientes seis pasos [3,18]:

- Construir la matriz de decisión normalizada $\tilde{R} = (\tilde{r}_i^l)_{n \times p}$ utilizando los valores colectivos obtenidos en el proceso de agregación \tilde{r}_i^l .
- Obtener la matriz de decisión normalizada ponderada $\tilde{V} = (\tilde{v}_i^l)_{n \times p}$ donde $\tilde{v}_i^l = \tilde{r}_i^l * w_i$.
- Definir la solución ideal positiva y negativa difusa.

$$\tilde{A}^+ = (\tilde{v}_1^+, \dots, \tilde{v}_p^+), \quad \tilde{A}^- = (\tilde{v}_1^-, \dots, \tilde{v}_p^-),$$

donde $\tilde{v}_i^+ = (1, 1, 1, 1)$ y $\tilde{v}_i^- = (0, 0, 0, 0)$.

- Calcular la distancia de cada alternativa respecto a la solución ideal positiva y negativa \tilde{A}^+ , \tilde{A}^- respectivamente.

$$d^{l+} = \sum_{i=1}^p d(\tilde{v}_i^l, \tilde{v}_i^+) \quad d^{l-} = \sum_{i=1}^p d(\tilde{v}_i^l, \tilde{v}_i^-) \quad (12)$$

donde $l = \{1, \dots, n\}$ y $d(\cdot, \cdot)$ es la distancia entre dos números difusos trapezoidales.

- Calcular el coeficiente de cercanía para cada alternativa,

$$CC^l = \frac{d^{l-}}{d^{l+} + d^{l-}} \quad (13)$$

- Ordenar las alternativas atendiendo al coeficiente de cercanía obtenido CC^l .

4. Conclusiones

En algunos problemas de toma de decisión es necesario definir múltiples criterios de diferente naturaleza para poder valorarlos de la forma más apropiada. Además, en algunas ocasiones los expertos que participan en el problema de decisión dudan cuando tienen que expresar sus valoraciones porque no tienen suficiente información o conocimiento sobre dicho problema, y el uso de un único término lingüístico no es suficiente para reflejar su valoración. El concepto de Conjunto de Términos Lingüísticos Difusos Dudosos (CTLDD) permite modelar este tipo de incertidumbre provocada por la duda. En este trabajo hemos presentado un proceso de selección basado en un modelo difuso de toma de decisión multi-criterio TOPSIS capaz de modelar información heterogénea incluyendo el uso de expresiones lingüísticas comparativas basadas en CTLDD.

Agradecimientos

Este trabajo está parcialmente financiado por el proyecto de investigación TIN2012-31263, el Ministerio de Economía y Competitividad formación posdoctoral (FPDI-2013-18193), la red de excelencia Lógica Difusa y Soft Computing (LODISCO) TIN2014-56381-REDT y fondos FEDER.

Referencias

1. N. Agell, M. Sánchez, F. Prats, and L. Roselló. Ranking multi-attribute alternatives on the basis of linguistic labels in group decisions. *Information Sciences*, 209(1):49–60, 2012.
2. S. Cevik Onar, B. Oztaysi, and C. Kahraman. Strategic decision selection using hesitant fuzzy TOPSIS and interval type-2 fuzzy AHP: A case study. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 7(5):1002–1021, 2014.
3. S.J. Chen and C.L. Hwang. *Fuzzy Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications*, volume 375. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

4. F. Herrera, L. Martínez, and P.J. Sánchez. Managing non-homogeneous information in group decision making. *European Journal of Operational Research*, 166(1):115–132, 2005.
5. H. Ishibuchi, T. Nakashima, and M. Nii. *Classification and Modeling with Linguistic Information Granules: Advanced Approaches to Linguistic Data Mining*. Springer, Berlin, 2004.
6. C. Kahraman, I. Kaya, and S. Cebi. A comparative analysis for multiattribute selection among renewable energy alternatives using fuzzy axiomatic design and fuzzy analytic hierarchy process. *Energy*, 34(10):1603–1616, 2009.
7. D. Kuchta. Fuzzy capital budgeting. *Fuzzy Sets and Systems*, 111:367–385, 2000.
8. D.F. Li. TOPSIS-based nonlinear-programming methodology for multiattribute decision making with interval-valued intuitionistic fuzzy sets. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 18(2):299–311, 2010.
9. D.F. Li, Z.G. Huang, and G.H. Chen. A systematic approach to heterogeneous multiattribute group decision making. *Computers & Industrial Engineering*, 59(4):561–572, 2010.
10. H. Liu and R.M. Rodríguez. A fuzzy envelope for hesitant fuzzy linguistic term set and its application to multicriteria decision making. *Information Sciences*, 258:266–276, 2014.
11. J. Ma, D. Ruan, Y. Xu, and G. Zhang. A fuzzy-set approach to treat determinacy and consistency of linguistic terms in multi-criteria decision making. *International Journal of Approximate Reasoning*, 44(2):165–181, 2007.
12. L. Martínez. Sensory evaluation based on linguistic decision analysis. *International Journal of Approximate Reasoning*, 44(2):148–164, 2007.
13. S. Opricovic and G.H. Tzeng. Compromise solution by MCDM methods: A comparative analysis of VIKOR and TOPSIS. *European Journal Operational Research*, 156(2):445–455, 2004.
14. R.M. Rodríguez and L. Martínez. An analysis of symbolic linguistic computing models in decision making. *International Journal of General Systems*, 42(1):121–136, 2013.
15. R.M. Rodríguez, L. Martínez, and F. Herrera. Hesitant fuzzy linguistic term sets for decision making. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 20(1):109–119, 2012.
16. Y. Tang and J. Zheng. Linguistic modelling based on semantic similarity relation among linguistic labels. *Fuzzy Sets and Systems*, 157(12):1662–1673, 2006.
17. V. Torra. Hesitant fuzzy sets. *International Journal of Intelligent Systems*, 25(6):529–539, 2010.
18. Y.J. Wang and H.S. Lee. Generalizing TOPSIS for fuzzy multiple-criteria group decision-making. *Computers & Mathematics with Applications*, 53(11):1762–1772, 2007.